

Έξετάσεις Περιόδου Ίουνίου  
στο μάθημα  
Μιγαδικές Συναρτήσεις 1

1. [0.6] Να βρείτε τὰ σημεία τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἀντιστοιχοῦν στοὺς μιγαδικούς ἀριθμούς οἱ ὅποιοι ἱκανοποιοῦν τὴ σχέση  $1 + i = z^4$ .
2. [0.2] α) Να δώσετε τὸν ὄρισμό τῆς ἀκεραίας μιγαδικῆς συνάρτησης.  
[0.3] β) Να δώσετε ἓνα παράδειγμα ἀκεραίας συνάρτησης  $f$ .  
[0.3] γ) Να δώσετε ἓνα παράδειγμα συνάρτησης  $g$  ἢ ὁποία δὲν εἶναι ἀκεραία.
3. [0.8] Να ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἂν  $f$  εἶναι μιὰ ἀκεραία μιγαδικὴ συνάρτηση τέτοια ὥστε  $|f(z)| \leq 2|z - i|$ , γιὰ κάθε μιγαδικὸ ἀριθμὸ  $z$ , τότε ὑπάρχει σταθερὸς μιγαδικὸς ἀριθμὸς  $c$  τέτοιος ὥστε  $f(z) = c(z - i)$ , γιὰ κάθε  $z$ .
4. [0.3] α) Να δώσετε μιὰ παραμετρικὴ παράσταση τῆς τεθλασμένης καμπύλης μὲ κορυφὲς τὰ σημεία  $i, 1 + i, 1$ .  
[1.0] β) Να ὑπολογίσετε τὸ ὀλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \left[ \frac{1}{|z|^2} + z + \sin(z) \right] dz,$$

ὅπου  $\gamma$  εἶναι καμπύλη ποὺ δίνεται στὸ ἐρώτημα (α).

5. [1.3] Δίνεται ἡ συνάρτηση μὲ τύπο

$$f(z) = \frac{z - 1}{z^2(1 + z)}.$$

Νὰ τὴν ἀναπτύξετε στὸν δακτύλιο  $\Delta(-1, 0, 1)$  σὲ σειρὰ Laurent μὲ κέντρο τὸ σημεῖο  $-1$ .

6. [1.3] Να ἀποδείξετε ὅτι ὁ δείκτης στροφῆς μιᾶς κλειστῆς κατὰ τμήματα διαφορίσιμης καμπύλης  $\gamma$  ὡς πρὸς κάποιο σημεῖο  $z \in \mathbb{C}$ , μὲ  $z \notin \gamma$ , εἶναι ἓνας ἀκέραιος ἀριθμὸς.

7. [0.5] α) Νά δοθεῖ ὁ (μαθηματικὸς) ὀρισμὸς τῶν ὁμοτοπικῶν (κλειστῶν) καμπυλῶν ποὺ βρίσκονται σὲ ἕναν τόπο.

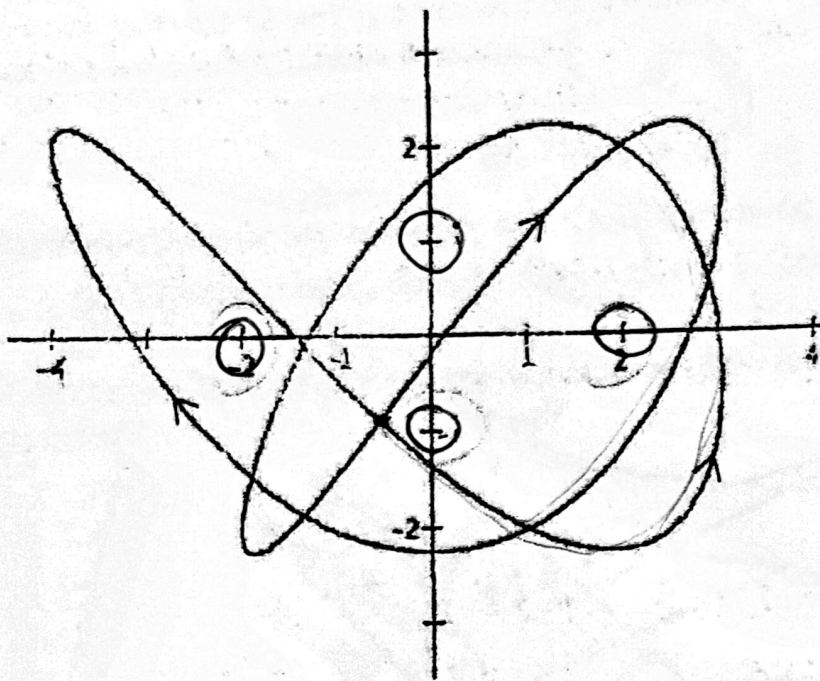
[0.8] β) Δεδομένου ὅτι οἱ κύκλοι μὲ κέντρα τὰ σημεῖα  $-1$  καὶ  $1$  καὶ ἀκτῖνες ἴσες μὲ  $1$  εἶναι καμπύλες ὁμοτοπικῆς στὸν τόπο  $B(0, 3)$ , νά δοθεῖ μιὰ συνάρτηση ὁμοτοπίας  $H(\cdot, \cdot)$ .

8. [0.3] α) Νά ὑπολογίσετε τοὺς δείκτες στροφῆς τῆς καμπύλης τοῦ σχήματος ὡς πρὸς τὰ σημεῖα  $-1, 1, i, -i, 2, -2$ .

[1.0] β) Νά ὑπολογίσετε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^4 - 3z^2 - 4} dz,$$

ὅπου  $\gamma$  εἶναι ἡ καμπύλη τοῦ σχήματος.



9. [1.3] Νά ὑπολογίσετε τὸ ὁλοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^0 \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 1} dx.$$

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 3 ὥρες.**